

所別	科目	准考證號碼 (請考生填入)	考試日期	節次	第/頁/共/頁
精密機電工程研究所	工程數學		95年5月7日	第一節	

1. 試求使得聯立方程組

$$x_1 + x_2 = b_1$$

$$2x_1 - x_2 = b_2$$

$$x_1 + 2x_2 = b_3$$

有解時, b_1, b_2 及 b_3 應有之關係。(10分)

2. 已知矩陣 (matrix)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$$

(a) 試求 A 之特徵值 (eigenvalues) 及其對應之特徵向量 (eigenvectors); (20分)

(b) 利用相似轉換 (similarity transformation) 可將 A 轉換成一對角矩陣 (diagonal matrix) D , 即

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

其中 λ_1 與 λ_2 為 A 之特徵值。試求適當之矩陣 P 與 P^{-1} 。(10分)

(c) 試導出 $e^A = Pe^D P^{-1}$ (提示: $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$) (10分)

(d) 承題 (c), 試求 $e^A = ?$ (10分)

3. 試解微分方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = t e^{-2t} \quad (20分)$$

4. (a) 試求週期為 2π 之週期函數 $f(t)$ 之傅立葉級數 (Fourier series), 其中

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0; \\ 1, & 0 < t < \pi. \end{cases} \quad (10分)$$

(b) 由題 (a) 之結果, 試導出 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ (10分)