

所別	科目	准考證號碼 (請考生填入)	考試日期	節次	第 頁 / 共 頁
精密機電工程研究所	工程數學		94年5月1日	第一節	

一、已知一方陣 (square matrix) 為

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix},$$

(1) 試求該方陣之特徵值 (eigen values) 及其對應之特徵向量 (eigen vectors); (15分)

(2) 試計算 e^A ? (10分)

二、對於一實對稱矩陣 (real, symmetric matrix) 而言, 試證明:

(1) 該矩陣之所有特徵值皆為實數; (10分)

(2) 對應於相異特徵值之特徵向量必互為正交 (orthogonal). (10分)

三、試解下列之初始值問題 (initial-value problem):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 9y = e^{-3x},$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dx} = 0. \quad (30分)$$

四、(1) 如果一函數 $f(x)$ 可表示為一傅立葉正弦級數 (Fourier sine series)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \quad (0 < x < \pi),$$

試推導

$$\int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2; \quad (10分)$$

(2) 由 (1) 之結果, 如果 $f(x) = 1$ ($0 < x < \pi$), 試先推導級數中之係數 A_n ,

再導出下列關係式

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (15分)$$