

准  
考  
證  
號  
碼

# 明新科技大學研究所碩士班 學年度招生考試入學答案卷

一般生 系所別： 電子所 組別： 無

在職生 科 目： 工程數學

題號	初閱成績	閱卷者簽名 或蓋章	複閱成績	閱卷者簽名 或蓋章
一				
二				
三				
四				
五				
六				
七				
八				
九				
十				
總計				

- 注意：**
1. 請核對座位、准考證與答案卷左上角之號碼是否相符。
  2. 左下角**彌封處不可損壞**，彌封處蓋有印章，如有遺漏，應立即向監試人員聲明。
  3. 答案卷除答案外不得書寫任何與答案無關之符號、文字及撕毀。
  4. 答案卷左上角號碼須於繳卷時請監試人員撕去，考生不得自行銷毀。
  5. 試題卷須隨卷繳還。


←切勿損壞此彌封處

# 明新科技大學九十三年學年度研究所碩士班招生考試入學答案卷

- 注意：1. 試題題號務必書寫清楚，並依序於作答區範圍內作答。  
2. 請用藍色或黑色鋼筆、簽子筆或原子筆作答，不可使用鉛筆。  
3. 答案卷紙請節用，此紙耗盡，用其他紙繼續作答者無效。

↓從此欄寫起

注意事項：不得攜帶計算器、手機及參考資料應試。

## 1. 微分方程 (30%)

1.1 求  $y'' - 4y' + 4y = 0$  之通解。(5%)

Sol: 令  $y = e^{rx}$  得特徵方程式

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r - 2)^2 = 0$$

$$r = 2, \quad r = 2 \quad (\text{重根})$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

1.2 求  $y'' - 2y' + 2y = 0$  之通解。(5%)

Sol: 令  $y = e^{rx}$  得特徵方程式

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i$$

$$y = e^x [A \cos x + B \sin x]$$

1.3 已知  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ，若  $M(x, y) = 2xy^2 + 3x^2y$ ， $N(x, y) = 2x^2y + x^3$ ，求微分方程之通解。(5%)

Sol:  $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy + 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$  所以為正合 (exact) 微分方程

$$f(x, y) = \int (2xy^2 + 3x^2y)dx + A(y) = x^2y^2 + x^3y + A(y)$$

$$f(x, y) = \int (2x^2y + x^3)dx + B(x) = x^2y^2 + x^3y + B(x)$$

比較上 2 式得微分方程為  $x^2y^2 + x^3y = c$

1.4 已知  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ，若  $M(x, y) = 2(y^2 - 3)$ ， $N(x, y) = 2xy$ ，求積分因子  $I(x)$ 。(5%)

Sol:  $\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{4y - 2y}{2xy} = \frac{1}{x}$

# 明新科技大學九十三年學年度研究所碩士班招生考試入學答案卷

- 注意：1. 試題題號務必書寫清楚，並依序於作答區範圍內作答。  
 2. 請用藍色或黑色鋼筆、簽子筆或原子筆作答，不可使用鉛筆。  
 3. 答案卷紙請節用，此紙耗盡，用其他紙繼續作答者無效。

↓從此欄寫起

$$\text{積分因子 } I(x) = \exp \int \frac{1}{x} dx = \exp[\ln x] = x$$

1.5 求  $x^2 - y^2 = k$  的正交曲線。(5%)

Sol:  $x^2 - y^2 = k$

$$2xdx - 2ydy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

正交曲線的斜率為  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_1$$

$$\ln xy = C_1$$

正交曲線為  $xy = C$

1.6 求  $y'' + 4y' + 3y = x - 1$  之全解。(5%)

Sol:  $r^2 + 4r + 3 = 0$

$$r = -3, \quad r = -1$$

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

令  $y_p = k_1 x + k_2$  代入

$$4k_1 + 3k_1 x + 3k_2 = x - 1$$

$$k_1 = \frac{1}{3}, \quad k_2 = -\frac{7}{9}$$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$$

2. 傅立葉及拉普拉斯轉換 (25%)

2.1 函數  $f(t) = t \sin t$ ，則其拉普拉斯轉換  $\mathcal{L}[f(t)] = ?$ 。(5%)

Sol:  $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t \sin t] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin t] = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$

2.2 已知函數  $f(t)$  的拉普拉斯轉換  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s+3}{s^2+9}$ ，求函數  $f(t)$ 。(5%)

Sol:  $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+3}{s^2+9} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{3}{s^2+3^2} \right] = \cos 3t + \sin 3t$

# 明新科技大學九十三年學年度研究所碩士班招生考試入學答案卷

- 注意：1. 試題題號務必書寫清楚，並依序於作答區範圍內作答。  
 2. 請用藍色或黑色鋼筆、簽子筆或原子筆作答，不可使用鉛筆。  
 3. 答案卷紙請節用，此紙耗盡，用其他紙繼續作答者無效。

↓從此欄寫起

2.3 已知函數  $f(t)$  的拉普拉斯轉換  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^4}$ ，求函數  $f(t)$ 。(5%)

$$\text{Sol: } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{t^3}{3!}$$

2.4 已知函數  $f(t)$  的拉普拉斯轉換  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s+3}{(s+1)(s-3)}$ ，求函數  $f(t)$ 。(5%)

$$\text{Sol: } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/2}{s+1} + \frac{3/2}{s-3}\right] = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t}$$

2.5 函數  $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$ ，求函數  $f(t)$  的傅立葉轉換。(5%)

$$\text{Sol: } a_n = \frac{1}{1} \int_0^2 f(t) \cos n\pi t dt = 0$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_0^2 f(t) \sin n\pi t dt = \int_0^1 \sin n\pi t dt - \int_1^2 \sin n\pi t dt$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ even} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin \pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \dots \right)$$

## 3. 線性代數 (25%)

3.1 矩陣  $C = AB$ ，則  $C = ?$  (5%)

$$\text{Sol: } C = AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3.2  $C$  的轉置矩陣  $C^T = ?$  (5%)

$$\text{Sol: } C^T = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

3.3  $C$  矩陣的大小  $|C| = ?$  (5%)

$$\text{Sol: } |C| = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -28 - 4 = -32$$

3.4  $C$  的反矩陣  $C^{-1} = ?$  (5%)

$$\text{Sol: } C^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} / |C| = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} / -32$$

3.5  $|C - \lambda I| = 0$ ，求特徵值 (eigen value)  $\lambda = ?$  (5%)

$$\text{Sol: } \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ 1 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 32 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{137}}{2}$$

# 明新科技大學九十三年學年度研究所碩士班招生考試入學答案卷

- 注意：1. 試題題號務必書寫清楚，並依序於作答區範圍內作答。  
2. 請用藍色或黑色鋼筆、簽子筆或原子筆作答，不可使用鉛筆。  
3. 答案卷紙請節用，此紙耗盡，用其他紙繼續作答者無效。

↓從此欄寫起

## 4. 向量分析 (20%)

已知向量  $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ ， $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$

4.1  $\vec{a}$  向量的大小  $|\vec{a}| = ?$  (5%)

Sol:  $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

4.2  $\vec{b}$  向量的單位向量  $\vec{v} = ?$  (5%)

Sol:  $\vec{v} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{6\vec{i} - 8\vec{j}}{10} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

4.3  $\vec{a}$  向量和  $\vec{b}$  向量的夾角為幾度? (5%)

Sol: 夾角為  $\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 。

4.4  $\vec{a}$  向量和  $\vec{b}$  向量形成的三角形面積為? (5%)

Sol: 三角形面積 =  $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = 5\sqrt{34}$